

سیستم های اسپینی - بخش سوم

مدل آیزینگ دوبعدی

وحیدکریمی پور - دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۱۱ دی ۱۴۰۴

۱ مقدمه

در درس گذشته مدل آیزینگ را به عنوان ساده ترین مدل از برهم کنش های اسپین ها در یک بعد به صورت دقیق حل کردیم. انگیزه اصلی برای پرداختن به مدل آیزینگ و مدل های مشابه آن این است که بتوانیم بفهمیم در یک دستگاه بس ذره ای از دل بی نظمی و تلاطمات گرمایی از یک سو و برهم کنش های دو به دوی ذرات چگونه نظم سرتاسری و همبستگی های بلند برد ظهور می کند. این پدیده یعنی ظهور نظم از دل بی نظمی یکی از مهم ترین و شایع ترین پدیده هایی است که در دستگاه های بس ذره ای رخ می دهد. یخ بستن آب، پیدایش مغناطش در جامدات، جدایی فازها در آلیاژهای دوگانه، پدیدار شدن ابررسانی و ابرشارگی و ده ها مثال دیگر تنها نمونه هایی از این گذار فاز^۱ هستند.

دیدیم که حل میدان متوسط چگونه در این بعد دچار خطای فاحش می شود و پیش بینی می کند که در این وقتی که دما پایین تر از یک دمای بحرانی است، مغناطش خود بخود پدیدار می شود، در حالیکه حل دقیق نشان می دهد که مغناطش خود بخود هرگز در یک بعد رخ نمی دهد مگر در دمای صفر مطلق. بنابراین سوالی که با آن مواجهیم این است که آیا ممکن است در ابعاد بالاتر هم تقریب میدان متوسط به اشتباه پیدایش نظم خود به خود را پیش بینی کند؟ در واقع سوالی که در اواسط دهه پنجاه میلادی برای همه فیزیکدان ها مطرح بود، سوالی عمیق تر از محدوده

^۱Phase Transition

اعتبار تقریب میدان متوسط بود. سوال این بود که با شروع از یک عبارت یکتا برای برهم کنش های میکروسکوپی یا همان هامیلتونی و با کاربرد مکانیک آماری، آیا اساساً می توان فازهای مختلف ماده را توصیف کرد یا این که برای هر فاز یک برهم کنش میکروسکوپی لازم است. در واقع سوال این بود که چگونه ممکن است با شروع از یک هامیلتونی یکتا هم بخار آب را توضیح داد و هم آب را و هم یخ را؟

این مدل یکی از مهم ترین مدل های مکانیک آماری است. اهمیت این مدل تنها به خاطر این نیست که مدل ساده ای برای مطالعه نظم خود بخود مغناطیسی در جامدات فرومغناطیسی یا پادفرومغناطیسی است بلکه در این است که تعداد بسیار زیادی از پدیده های دیگر را چه در فیزیک و چه در دیگر شاخه های علوم می توان به این مدل یا تغییراتی از این مدل نگاشت. هم چنین مدل آیزینگ خاستگاه بسیاری دیگر از مدل های دقیقاً حل پذیر در مکانیک آماری شده است. بسیاری از روش های حل دقیق مدل های بس ذره ای که امروزه می شناسیم نخستین بار در مطالعه مدل آیزینگ معرفی شده اند. در این درس مدل آیزینگ را نخست در یک بعد و سپس در دو بعد مطالعه می کنیم. اگر چه راه های متنوعی برای حل تقریبی مدل آیزینگ وجود دارد، در این درس تمرکز ما روی حل های دقیق این مدل است.

■ **نکته مهم:** در همه جای فیزیک ما با روش های تقریبی روبرو هستیم چرا که تنها مسایل بسیار محدود و ایده آلی را می توان به صورت دقیق حل کرد و تقریباً هر مسئله واقعی ای را می بایست با استفاده از روش های تقریبی حل کرد. برای حل این نوع مسایل در هر شاخه ای از فیزیک یک نوع روش های اختلالی^۲ ابداع شده است. در این روش های اختلالی همواره پارامتر کوچکی وجود دارد که نشان می دهد اهمیت جمله های بالاتر بسط به مرور کم و کم تر می شوند. بسته به میزان دقتی که می خواهیم می توانیم تنها چند جمله اول از بسط های اختلالی را نگاه داریم و کمیت های فیزیکی مورد علاقه خود را با تقریب دلخواه حساب کنیم. اما بعضی از سوالات مهم را نمی توان با بسط اختلالی، هر چقدر هم که جملات بیشتری را نگاه داریم به طور قاطع پاسخ داد. تابع پارش مدل آیزینگ به هر صورت که محاسبه اش کنیم در بسط اختلالی همواره مجموع تعداد محدودی جملات تحلیلی است و در نتیجه در هر نوع بسطی این تابع یک تابع تحلیلی خواهد بود و هیچ گونه تکیگی از خود نشان نخواهد داد. (برای نمونه به تابع

$$1 + x + x^2 + \dots x^N$$

توجه کنید که به ازای هر مقداری از N همواره یک تابع تحلیلی از x است و تنها وقتی که N به سمت بی نهایت میل می کند به صورت $\frac{1}{1-x}$ در می آید و تکیگی اش آشکار می شود.)

Perturbative Method^۲

آنچه که در حل دقیق مدل آیزینگ نشان داده شده در واقع اثبات دقیق این امر است که در دو بعد یک گذار فاز رخ می دهد. در واقع با حل دقیق مدل آیزینگ شما اولین محاسبه غیراختلالی خود را انجام داده اید. اما توجه کنید که آنچه در این جا نشان داده ایم تنها یک مثال است و برای اثبات دقیق می بایست نشان دهیم که این نوع حذف ها در همه رتبه های اختلال رخ می دهد و دقیقا همین نوع ملاحظات است که بدست آوردن نتایج غیراختلالی^۳ را در هر موضوعی از فیزیک، خواه در مکانیک آماری و فیزیک ماده چگال، خواه در فیزیک ذرات بنیادی و نظریه میدان، بی اندازه دشوار و در عین حال جذاب می کند.

۲ مدل دو بعدی آیزینگ

در این بخش به بررسی حل دقیق مدل آیزینگ دو بعدی می پردازیم. نخستین بار لارس آنساگر^۴ در دهه ۱۹۴۰ توانست حل دقیق این مدل را البته در میدان مغناطیسی صفر بدست آورد و نشان دهد که این مدل واقعا در یک دمای محدود دچار گذار فاز شده و دارای مغناطش خود به خود می شود. حل آنساگر مبتنی بر روش ماتریس انتقال است. همانطور که می توانید حدس بزنید ماتریس انتقال برای مدل دوبعدی که دارای N سطر و N ستون است یک ماتریس 2^N بعدی است و بنابراین پیدا کردن بزرگترین ویژه مقدار آن به صورت تحلیلی و دقیق کار بسیار دشواری است. اهمیت کار آنساگر نیز این است که توانسته است این کار را انجام دهد و برای اولین بار به طور دقیق نشان دهد که گذار فاز ممکن است. از آن هنگام تا کنون نه تنها روش های مختلفی برای حل مدل آیزینگ کشف شده است بلکه مدل های متنوع دیگری نیز در دوبعد تعریف شده اند که به صورت دقیق قابل حل هستند. امروزه شاخه ای از فیزیک تحت نام «مدل های حل پذیر»^۵ یا «مدل های انتگرال پذیر»^۶ به مطالعه این نوع مدل ها هم در مکانیک آماری و هم در نظریه میدان و ارتباط آنها با یکدیگر می پردازد. در این بخش ما نخست به معرفی دو نوع بسط برای حل اختلالی مدل آیزینگ می پردازیم و سپس یک مفهوم مهم فیزیکی به نام دوگانی^۷ را معرفی می کنیم که به کمک آن می توان نقطه گذار فاز را به فرض وجود به طور دقیق بدست آورد. دست آخر یک روش حل برای مدل آیزینگ دوبعدی را مطالعه می کنیم.

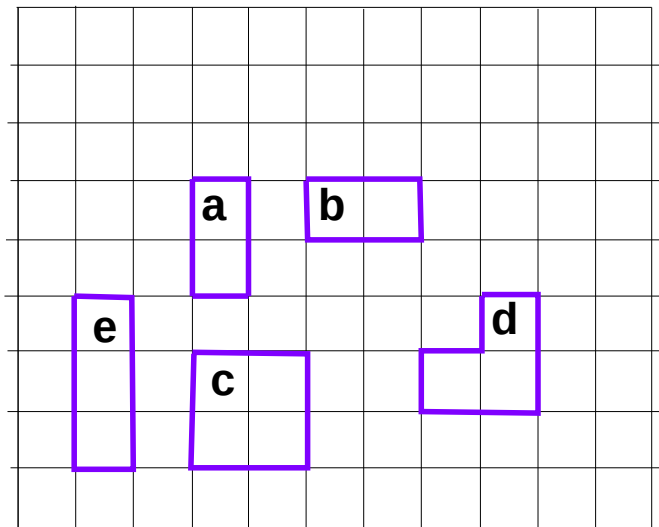
^۳Non-perturbative Results

^۴Lars Onsager

^۵Exactly Solvable Models

^۶Integrable Models

^۷Duality



شکل ۱: حلقه های بسته در شبکه آیزینگ دو بعدی .

۱.۲ بسط دمای بالا

بسط دمای بالا یک روش اختلالی است که در دماهای بالا یعنی وقتی که $J \gg kT$ باشد و سیستم تقریباً بی نظم باشد، مفید است. در واقع پارامتر بسط بستگی مستقیم به مقدار $\frac{J}{kT}$ دارد و بنابراین هر چه که دما بالاتر باشد می توان با جملات کمتری در بسط اختلالی تابع پارش مدل آیزینگ را با دقت خوب بدست آورد.

می دانیم که هامیلتونی مدل آیزینگ به شکل زیر است:

$$H = -J \sum_{i,j} s_i s_j. \quad (۱)$$

تابع پارش عبارت است از

$$Z = \sum_S e^{\beta J \sum_{i,j} s_i s_j} \equiv \sum_{s_1, s_2, \dots, s_N} \prod_{links} e^{\beta J s_i s_j}. \quad (۲)$$

براحتی می توان نشان داد که رابطه زیر همیشه برقرار است. صحت این رابطه متکی به این است که $s_i s_j$ همواره یا یک است و یا منهای یک

$$e^{K s_i s_j} = \cosh K + s_i s_j \sinh K = \cosh K (1 + s_i s_j \tanh K) =: \cosh K (1 + s_i s_j \tau) \quad (۳)$$

در نتیجه می توان تابع پارش را به شکل زیر بازنویسی کرد که در آن $\tau = \tanh \beta J$.

$$Z_N(\beta J) = \sum_S \prod_{links} \cosh \beta J (1 + s_i s_j \tau) = (\cosh \beta J)^L \sum_S \prod_{links} (1 + s_i s_j \tau) \quad (۴)$$

که در آن L تعداد تمام اتصالات شبکه است. برای یک شبکه مربعی در دو بعد که N تا اسپین دارد تعداد این اتصالات برابر است با $L = 2N$.
در این جا فرض کرده ایم که شرایط مرزی پریودیک برقرار است.

می توان این عبارت را بر حسب قوای متوالی τ بسط داد. جملات اول بسط به ترتیب زیر خواهند بود :

$$\begin{aligned} Z &= (\cosh K)^L \sum_S \prod_{links} (1 + s_i s_j \tau) \\ &= (\cosh K)^L \sum_S \left(1 + \tau \left(\sum_{links} s_i s_j \right) + \tau^2 \left(\sum_{doublelinks} s_i s_j s_k s_l \right) + \tau^3 \left(\sum_{triplelinks} s_i s_j s_k s_l s_m s_n \right) + \dots \right) \end{aligned} \quad (۵)$$

که در آن ها $\sum_{doublelinks}$ به معنای جمع روی جفت های اتصالات مختلف و $\sum_{triplelinks}$ به معنای جمع روی تمام اتصالات سه تایی مختلف است والی آخر.

دقت کنید که متناظر با هر $s_i s_j$ یک اتصال در شبکه وجود دارد.

از آنجا که در دمای های بالا τ کوچک است و می توانیم این عبارت را بر حسب قوای τ بسط دهیم این بسط به بسط دمای بالا مشهور است. حال توجه می کنیم که روابط زیر همیشه برقرارند که در آن ها $\sum_S$ به معنای جمع روی وضعیت همه اسپین های شبکه است.

$$\sum_s 1 = 2 \quad \sum_s s = 0 \quad (۶)$$

و

$$\sum_S 1 = 2^N \quad \sum_S s_i = 0 \quad (۷)$$

در نتیجه در جمع های بالا عبارت هایی مثل عبارت زیر که در آن ها حتی یکی از s ها به صورت منفرد ظاهر شده باشد برابر با صفر خواهند بود:

$$\sum_S s_i s_j \dots s_k = 0 \quad (۸)$$

تنها عبارت هایی مخالف صفر خواهند بود که در آن هر کدام از s ها به صورت جفت ظاهر شده باشد. این حرف به این معناست که در رابطه (5) تنها جملاتی باقی خواهند ماند که اتصالات مربوط به آنها مانند شکل (1) یک منحنی بسته تشکیل دهند. یعنی

$$Z = (\cosh K)^{2N} 2^N \sum_{Loop} \tau^{l_{Loop}} \quad (9)$$

که در آن N_l تعداد منحنی های بسته به طول l است.

که در آن جمع روی تمام منحنی های بسته است و l_{loop} محیط یک حلقه است و $Q(\tau)$ تابع مولد تعداد این منحنی هاست. می توان این رابطه را به شکل زیر بازنویسی کرد

$$Z_N(K) = (\cosh K)^{2N} 2^N \sum_{l=0}^{\infty} N_l \tau^l = (\cosh K)^{2N} 2^N Q_N(\tau) \quad (10)$$

که در آن N_l تعداد منحنی های بسته به طول l است. دقت کنید که پارامتر τ وقتی که $\frac{J}{kT}$ کوچک باشد کوچک است به همین مناسبت این بسط را بسط دمای بالا می نامند.

۲.۲ بسط دمای پایین

در بخش گذشته بسط دمای بالا را مطالعه کردیم که بسطی است در فاز بی نظم. حال یک نوع دیگر بسط را مطالعه می کنیم که برای دماهای پایین مناسب است. برای فهم این بسط هامیلتونی را به شکل زیر می نویسیم:

$$H = J \sum_{i,j} (1 - s_i s_j) - 2N = H_0 - 2NJ \quad (11)$$

دقت کنید که این هامیلتونی با هامیلتونی قبلی متفاوت نیست تنها به شکل متفاوتی نوشته شده است. می توانیم بنویسیم:

$$Z_N = e^{2\beta NJ} \sum_{\{s\}} e^{-\beta J \sum_{\langle i,j \rangle} (1 - s_i s_j)} \quad (12)$$

دقت کنید که با کم و زیاد کردن یک مقدار ثابت هامیلتونی را به شکلی نوشته ایم که به وضوح نشان می دهد حالت منظم یعنی حالتی که همه اسپین ها مثل هم هستند مقدار انرژی صفر دارد. و هر دو اسپین مجاوری که مثل هم نباشند مقدار انرژی را به اندازه $2J$ بالا می برند. بنابراین اگر

یک حالت منظم مثل حالتی که همه اسپین ها در حالت $+1$ هستند را در نظر بگیریم این حالت انرژی صفر دارد. حال حالتی را در نظر بگیرید که در آن ها جزیره ای از اسپین ها برگشته اند و مقدار -1 را اختیار کرده اند. اگر محیط این جزیره برابر با l باشد، آنگاه انرژی این حالت برابر است با $2Jl$. دقت کنید که مهم نیست که این جزیره یک پارچه یا دو پارچه یا چندپارچه باشد. از آنجا که طول کل محیط آن برابر با l است انرژی آن برابر با $2Jl$ است. هر حالت دیگری را که در نظر بگیریم چیزی نیست جز جزیره هایی که در آنها اسپین ها برگشته اند و در نتیجه انرژی آن ها برابر است با $2J$ برابر طول کل محیط این جزیره ها. بنابراین تابع پارش را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$Z_N = e^{2\beta NJ} \sum_{l=0}^{\infty} N_l e^{-2\beta J l} \quad (13)$$

دیده می شود که تابعی که در این بسط نیز وجود دارد همان تابع Q است اگر چه متغیر درون آن تغییر کرده است. بنابراین داریم

$$Z_N = e^{2\beta NJ} Q_N(e^{-2\beta J}). \quad (14)$$

۳ دوگانی

در درس های مقدماتی ریاضی با توابع زوج و فرد آشنا شده ایم. زوج و فرد بودن یک تقارن خیلی ساده است که باعث می شود با داشتن مقدار تابع برای یک متغیر، مقدار آن را برای یک مقدار دیگر از متغیر نیز بدست آوریم. یک تابع تناوبی نمونه دیگری از یک تابع متقارن را نشان می دهد. یک مثال دیگر تابع $f(x) = x + \frac{1}{x}$ است. هرگاه مقدار این تابع را برای $x = 10$ بدانیم مقدار آن نیز برای $x = 0.1$ نیز می دانیم. حال از خود سوال می کنیم که آیا ممکن است که تابع پارش مدل آیزینگ نیز به نوعی چنین خاصیتی داشته باشد؟ آیا ممکن است که تابع پارش مدل آیزینگ در دماهای بالا و پایین به هم مرتبط باشند؟ البته طبیعتاً انتظار داریم که این ارتباط در صورت وجود یک رابطه ساده مثل زوج بودن یا نظیر آن نباشد. نخستین بار کرامرز و وانیر^۸ متوجه شدند که این دو بسط کاملاً شبیه به هم هستند و به هم قابل تبدیل شدن هستند. آنها از این خاصیت استفاده کردند و با فرض اینکه یک گذار فاز وجود داشته باشد توانستند دمای گذار را به طور دقیق بدست آورند. این رابطه یعنی رابطه تابع پارش مدل آیزینگ در دمای بالا و در دمای پایین به دوگانی کرامرز- وانیر معروف است^۹.

^۸Krammers and Wannier
^۹Krammers-Wannier Duality

در این بخش سعی می کنیم دوگانی کرامرز- وانیر را بفهمیم. فرض کنید که یک مدل آیزینگ با ثابت برهم کنش J داریم. هرگاه بسط دمای بالا را برای تابع پارش این مدل را در دمای T بنویسیم خواهیم داشت:

$$Z_N(K) = 2^N (\cosh K)^{2N} Q_N(\tanh K) \quad (15)$$

که در آن $K = \frac{J}{kT}$. حال فرض کنید که برای این مدل تابع پارش را در دمای T' بنویسیم و از بسط دمای پایین استفاده کنیم. آنگاه بنابر رابطه (۱۴) خواهیم داشت:

$$Z_N(K') = e^{2K'N} Q_N(e^{-2K'}), \quad (16)$$

که در آن $K' = \frac{J}{kT'}$. آیا رابطه ای بین این دو تابع پارش یعنی تابع پارش یک مدل در دمای بالا و دمای پایین وجود دارد؟ دقت کنید که محاسبه تابع پارش برای مدل آیزینگ کار بسیار سختی است. اما علیرغم این سختی شاید بتوانیم چنین رابطه ای را پیدا کنیم. دلیل این کار هم این است که وقتی به رابطه های (۱۵، ۱۶) نگاه می کنیم می بینیم که هر دوی آنها بر حسب یک تابع نوشته شده اند اگرچه در این تابع متغیرهای متفاوتی برای دمای بالا و پایین به کار رفته است. خود این تابع را با سختی بسیار می توان حساب کرد ولی در این جا نیازی به محاسبه آن نداریم تنها این مهم است که در هر دو تابع پارش این تابع به کار رفته است. برای فهم رابطه دوگانی تنها کاری که باید بکنیم این است که تابع Q_N را بین دو عبارت تابع پارش (۱۵، ۱۶) حذف کنیم. البته لازمه این کار این است که متغیرهای دو تابع را با هم مساوی قرار دهیم. بنابراین قرار می دهیم

$$e^{-2K'} = \tanh K. \quad (17)$$

■ **تمرین:** نشان دهید که رابطه بالا معادل است با رابطه زیر:

$$\sinh 2K \sinh 2K' = 1. \quad (18)$$

دقت کنید که این رابطه بیان می کند وقتی $K = \frac{J}{kT}$ کوچک است $K' = \frac{J}{kT'}$ بزرگ است و بالعکس. این امر به این معناست که وقتی T بزرگ باشد، T' کوچک است و بالعکس.

حال برای هر دو دمایی که در رابطه (۱۸) صدق کنند داریم:

$$\frac{Z_N(K)}{2^N (\cosh K)^{2N}} = \frac{Z_N(K')}{e^{2K'N}}. \quad (19)$$

این همان رابطه ای است که می خواستیم یعنی تابع پارش مدل آیزینگ در دو دمای متفاوت که یکی بالاتر از J/k و دیگری پایین تر از J/k است به هم ربط داده شده اند. باز هم برمی گردیم به مثال ساده ای که در ابتدای این بخش به آن اشاره کردیم. فرض کنید که ما بگوییم که یک

تابع زوج تنها در یک نقطه غیرتحلیلی است یعنی یا خودش یا یکی از مشتق هایش ناپیوسته است. به نظر شما این نقطه چه نقطه ای است؟ آیا می توانید بدون دانستن شکل دقیق تابع تنها با اطلاعات داده شده یعنی اینکه تابع زوج است و تنها یک نقطه تکین دارد آن نقطه را پیدا کنید؟ براحتی می توانید خودتان را قانع کنید که پاسخ این سوال مثبت است و نقطه مورد نظر نقطه 0 است.

■ **تمرین:** هرگاه به شما بگویند که یک تابع دارای تقارن

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (20)$$

است و تنها یک نقطه غیرتحلیلی دارد، آن نقطه کدام است؟

بعد از این مثال ساده به رابطه (۱۹) توجه می کنیم. برای وضوح بیشتر از طرفین رابطه (۱۹) لگاریتم می گیریم و طرفین را بر واحد تعداد ذرات حساب می کنیم. با تعریف $f := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_N}{N}$ بدست می آوریم

$$f(K) = f(K') + \ln 2 (\cosh K)^2 - 2K' \quad (21)$$

از استدلال و مشاهده فیزیکی می دانیم که در مدل آیزینگ، در صورت وجود، تنها یک نقطه گذار فاز وجود دارد یعنی این مدل تنها دو فاز یکی منظم و دیگری بی نظم دارد و اگر تابع پارش اش یا تابع انرژی آزاد، دارای تکینگی باشد این تکینگی فقط در یک نقطه است. یعنی نقطه ای که شرط $K = K'$ برقرار می شود. بنابراین نقطه گذار فاز با توجه به این تساوی و رابطه (۱۸) از رابطه زیر بدست می آید:

$$\sinh 2K_c \sinh 2K_c = 1. \quad (22)$$

■ **تمرین:** از این رابطه استفاده کنید و نشان دهید که دمای بحرانی برابراست با:

$$kT_c = \frac{2J}{\ln(1 + \sqrt{2})}. \quad (23)$$

۴ حل دقیق مدل آیزینگ دوبعدی

مدل آیزینگ دوبعدی نخستین بار در سال ۱۹۴۴ توسط لارس آنساگر^{۱۰} به روش ماتریس انتقال حل شد. برای یک شبکه مربعی $N \times N$ ماتریس انتقال یک ماتریس $2^N \times 2^N$ بعدی است. محاسبه تابع پارش این مدل در حد ترمودینامیک نیازمند بدست آوردن بزرگترین ویژه مقدار ماتریس انتقال است. هرگاه یک شبکه 10×10 داشته باشیم، ماتریس انتقال آن یک ماتریس مربعی با بعد 1024×1024 است. چنین ماتریسی را با کامپیوترهای امروزی می توان براحتی قطری کرد. اما یک شبکه 10×10 با حد ترمودینامیک خیلی فاصله دارد. برای نزدیک شدن به حد ترمودینامیک شبکه را 100×100 می گیریم که شامل تنها 10 هزار اسپین است. ماتریس انتقال چنین شبکه ای یک ماتریس مربعی با بعد $2^{100} \sim 10^{30}$ است که هیچ کامپیتری توانایی ذخیره کردن درایه هایش را نیز ندارد. به این ترتیب است که یم توانیم اهمیت حل دقیق مدل آیزینگ را خواه با استفاده از روش ماتریس انتقال یعنی روش اولیه آنساگر یا روش های دیگری بفهمیم. در این درس به حل آنساگر نخواهیم پرداخت و به جای آن از روش شمارش حلقه ها می پردازیم. این روش هشت سال بعد از آنساگر در ۱۹۵۲ مشترکاً توسط کتز و وارد^{۱۱} ابداع شد و همان سالها نیز ریچارد فاینمن سهم مهمی در اصلاح این روش ایفا کرد. به همین دلیل می توانیم این روش را روش شمارش حلقه ها یا روش کتز-وارد-فاینمن^{۱۲} بخوانیم.

بخش مقدماتی کار را قبلاً انجام داده ایم به این معنا که مسئله را تبدیل کرده ایم به محاسبه تابع $Q_N(\tau)$ که نیازمند جمع روی تمام گراف های بسته در شبکه است.

$$Z_N(\beta J) = 2^N (\cosh \beta J)^{2N} Q(\tau) \quad \tau := \tanh(\beta J) \quad (24)$$

که در آن

$$Q(\tau) := \sum_{l=1} N_l \tau^l \quad (25)$$

که در آن N_l تعداد تمام منحنی های بسته به طول l در شبکه است. دشواری کار در این است که وقتی که با حلقه های با محیط زیاد سرو کار داریم انواع خیلی زیادی از این گراف ها وجود دارد که شمارش سیستماتیک آنها را دشوار می کند. با این وجود چنانچه در ادامه خواهیم دید این کار را می توان به طور دقیق انجام داد. برای ادامه بازمی گردیم به رابطه (۱۰). هدف ما محاسبه تابع $Q(\tau)$ است. نخست چند مفهوم را به دقت تعریف می کنیم:

Lars Onsager^{۱۰}
 Ward and Kac^{۱۱}
 Kac-Ward-Feynman Method^{۱۲}

■ **تعریف:** تابع $n(l)$ عبارت است از تعداد مسیرهای به طول l که می توانیم از مبداء مختصات یعنی نقطه $(0, 0)$ از شبکه شروع کنیم و به همان نقطه بازگردیم بدون اینکه از یک ضلع دوبار رد شویم. تمام مسیرهایی که در نظر می گیریم می بایست یک پارچه باشند و نمی بایست خود را قطع کنند.

فرض کنید که بتوانیم جمع روی حلقه ها را برای همه حلقه های یک پارچه انجام دهیم. این تابع را برای تمیز دادنش از تابع $Q(\tau)$ با $Q^{(1)}(\tau)$ نمایش می دهیم.

$$q(\tau) = \sum_{l=1}^{\infty} n_l \tau^l, \quad (26)$$

که در آن n_l تعداد تمام حلقه های یک پارچه به طول l است. حال سوال این است که بقیه مسیرهای چند پارچه را چه کنیم؟ پاسخ این سوال ساده است و آن اینکه می توانیم بنویسیم:

$$Q(\tau) = e^{Q^{(1)}(\tau)}. \quad (27)$$

برای درک این رابطه طرف راست را بسط می دهیم:

$$Q(\tau) = 1 + Q^{(1)}(\tau) + \frac{1}{2!} Q^{(1)}(\tau) Q^{(1)}(\tau) + \frac{1}{3!} Q^{(1)}(\tau) Q^{(1)}(\tau) Q^{(1)}(\tau) + \dots \quad (28)$$

نکته مهم: جمله اول سهم همه مسیرهای یک پارچه ای است که خود را قطع نمی کنند. هر مسیری که خود را یک بار قطع کند به عنوان یک مسیر دو پارچه در $\frac{1}{2!} Q^{(1)}(\tau) Q^{(1)}(\tau)$ شمرده می شود. این عبارت بر دو تقسیم شده است تا از دوباره شماری پرهیز شود و الی آخر. به همین ترتیب هر مسیری که دارای دو نقطه تقاطع باشد در رتبه سه یعنی در $\frac{1}{3!} Q^{(1)}(\tau) Q^{(1)}(\tau) Q^{(1)}(\tau)$ شمرده می شود و الی آخر.

تابع $Q^{(1)}(\tau)$ نیازمند محاسبه $N^{(1)}(l)$ یعنی تعداد حلقه های بسته مجاز به طول l در تمام شبکه است. این محاسبه را می توان تقلیل داد به محاسبه تعداد حلقه های بسته به طول l که از یک نقطه مبدا مثلاً نقطه $(0, 0)$ شروع می کنند و به آن باز می گردند. اگر این تعداد را با $n(l)$ نشان دهیم آنگاه براحتی معلوم می شود که

$$N^{(1)}(l) = \frac{Nn(l)}{l}.$$

دلیل اش هم این است که نقطه شروع می تواند به جای نقطه مبدا هر نقطه دیگری باشد و تعداد این نقاط N تاست. اما l تا از این نقاط یعنی نقاطی که روی مسیر هستند همگی منجر به یک مسیر می شوند و در واقع l بار شمرده می شوند. بنابراین می بایست عدد نهایی را بر l تقسیم کرد.

با این حساب تابع $Q^{(1)}(\tau)$ به شکل زیر درمی آید:

$$Q^{(1)}(\tau) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{Nn(l)\tau^l}{l} \quad (29)$$

■ **تعریف:** برای محاسبه تابع $Q^{(1)}$ آن را به یک تابع دیگر مربوط می کنیم که محاسبه این دومی به رفتار یک ولگشت ارتباط دارد. متحرکی را در نظر بگیرید که از مبدا مختصات شروع به حرکت می کند و در هر گام یک امتیاز یا به اندازه τ کسب می کند. حال اگر این متحرک l قدم بردارد امتیازی که کسب می کند برابر است با τ^l . حال به این متحرک به اندازه طی کردن l گام فرصت می دهیم و امتیازی را حساب می کنیم که در طی کردن همه مسیرهای بسته به طول l و بازگشت به نقطه اولیه کسب می کند. این امتیاز برابر است با

$$n(l, \tau) = n_l \tau^l$$

. حال کلیه مسیرهای مجازی (مسیرهای غیرمقطعی که از یک اتصال دو بار عبور نمی کنند) که این متحرک می تواند با هر طولی طی کند را در نظر می گیریم و از خود می پرسیم که کل امتیازی که کسب می کند چقدر است. واضح است که این امتیاز برابر است با:

$$q(\tau) = \sum_{l=1}^{\infty} n(l, \tau) = \sum_{l=1}^{\infty} n_l \tau^l. \quad (30)$$

اگر این تابع را بتوانیم حساب کنیم، تابع $Q^{(1)}(\tau)$ را هم می توانیم حساب کنیم زیرا

$$\tau \frac{d}{d\tau} Q^{(1)}(\tau) = Nq(\tau) \quad (31)$$

بنابراین از این به بعد هدف ما محاسبه تابع $q(\tau)$ است.

این تابع را برای مقادیر کم می توان براحتی محاسبه کرد. خواننده براحتی می تواند خود را قانع کند که در یک شبکه مربعی مقادیر زیر درست اند:

$$n(1, \tau) = n(2, \tau) = n(3, \tau) = 0 \quad n(4, \tau) = 4\tau^4 \quad n(6, \tau) = 12\tau^6, \quad n(8, \tau) = c\tau^8. \quad (32)$$

■ **تمرین:** ضریب تناسب c را در رابطه بالا حساب کنید.

محاسبه تابع $n(l, \tau)$ برای طول های زیاد بسیار سخت است. دلیل آن هم امتناعی است که در قطع نکردن مسیر و هم چنین دو باره طی نکردن یک ضلع وجود دارد. به این ترتیب به نظر می رسد که همه چیز در محاسبه تابع پارش مدل آیزینگ موکول شده است به محاسبه تابع $n(l, \tau)$. این استدلال تقریباً درست است اما برای اینکه حل واقعا دقیق را بدست آوریم می بایست به یک نکته خیلی مهم توجه کنیم. نکته این است که وقتی عبارت $Q^{(1)2}(\tau)$ را حساب می کنیم مسیرهایی مثل آنچه که در شکل (d) در (۲) نشان داده شده است، نیز پدیدار می شوند. چنین مسیرهایی غیرمجازند و اصلاً نمی بایست شمرده شوند. می بایست برای چنین جلوگیری از پیدایش مسیره های غیرمجاز فکری بکنیم. دقت کنید که با محدود کردن خود به شمارش تنها مسیره های غیرمقاطع کاری کرده ایم که مسیره های دارای تقاطع در رتبه های بالاتر شمرده شوند. می خواهیم که مسیره های با یک تقاطع در رتبه دوم، مسیره های با دو تقاطع در رتبه سوم و مسیره های با سه تقاطع در رتبه چهارم و الی آخر شمرده شوند. برای این کار می بایست تابع رتبه یک را چنان بنویسیم که خاصیت های زیر را داشته باشد:

■ **الف-** همانطور که در تعریف اش گفتیم، هیچ مسیر متقاطعی در آن وجود نداشته باشد. بنابراین یک گراف مجاز مثل

گراف a در شکل (۲) به عنوان یک مسیر دو پارچه و یک گراف مجاز مثل b در همان شکل به عنوان یک مسیر سه پارچه شمرده خواهند شد.

■ **ب-** هیچ مسیری که در آن یک ضلع دوبار طی شده است نیز وجود نداشته باشد. بنابراین مسیری مثل مسیر c در شکل (۲) حتی در رتبه یک نباید شمرده شود.

■ **پ-** در مرتبه های بالاتر مسیرهایی مثل گراف (d) در شکل (۲) پدیدار نشود.

این کارها را مجموعاً اصلاح تابع رتبه یک می خوانیم و در بخش بعدی این کار را انجام می دهیم:

۱.۴ اصلاح تابع رتبه یک

دقت کنید که اصلاح تابع رتبه یک می بایست دو کار را انجام دهد. این که هر دو کار را می توان با یک ترفند حل کرد بی اندازه زیبا و جالب است. برای اینکه به جای مسیره های ساده مسیره های جهت دار را در نظر می گیریم. شیوه امتیازدهی برای این مسیر ها چنین است: در هر گامی که متحرک بر می دارد امتیازی که در آن گام کسب می کند به شکل زیر است:

$$w_l = \begin{cases} \omega, & \text{گردش ساعت گرد} \\ \omega^{-1}, & \text{گردش پادساعتگرد} \\ 1, & \text{حرکت رو به جلو} \\ 0, & \text{حرکت به عقب} \end{cases}. \quad (33)$$

که در آن

$$\omega = e^{i\pi/4}, \quad \omega^4 = -1$$

است.

با این شیوه امتیاز دهی، کل امتیازی که متحرک در طی کردن همه مسیرهای ممکن کسب می کند، بجای تابع $n(l, \tau)$ با تابع $n_\omega(l, \tau)$ محاسبه می شود. این تابع جمع روی تمام منحنی های یک پارچه و جهت دار به طول l است و منحنی ها می توانند خود را نیز قطع کنند. به این ترتیب یک مسیر بدون تقاطع چه در جهت راست گرد طی شود و چه در جهت چپ گرد در هر دو حالت امتیازی که می گیرد برابر است با

$$\omega_{total} = \prod_l \omega_l = e^{\pm i\frac{\pi}{4}} = -1 \quad (34)$$

. دلیل اش هم این است که در هر دو حالت این متحرک یا زاویه π طی می کند یا زاویه $-\pi$ تا به نقطه اولیه اش برسد. از آنجا که ما همه مسیرهای جهت دار ممکن را در نظر خواهیم گرفت برای آن که به هر مسیر بسته ای نهایتاً امتیاز یک بدهیم، می بایست امتیازی را که به هر مسیر می دهیم تقسیم بر 2- کنیم، زیرا این مسیر یک بار برای جهت چپ گرد و یک بار هم برای جهت راست گرد امتیاز 1- گرفته است. حال می خواهیم ببینیم که آیا با این شیوه امتیازدهی منظور کلی ما که در ملاک های الف تا پ در بالا گفته ایم برآورده می شود یا نه. خواهیم دید که این ملاک ها برآورده می شوند و مسیرهای غیرمجاز همگی امتیاز صفر اختیار می کنند و شمرده نمی شوند. اگر این انتظار ما برآورده شود، که خواهیم دید چنین است، آنگاه تابع تابع $n(l, \tau)$ برای همه مسیرهای مجاز به راحتی از رابطه زیر بدست خواهد آمد:

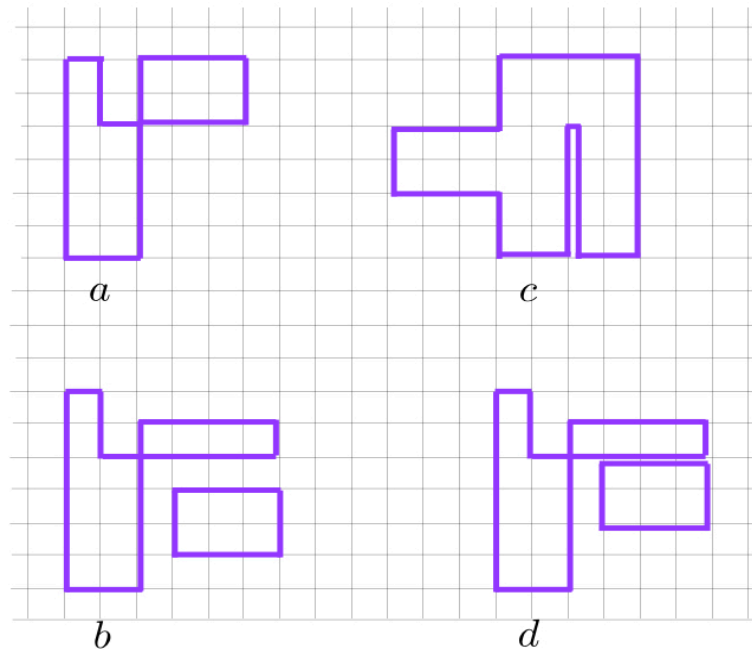
$$n(l, \tau) = \frac{-1}{2} n_\omega(l, \tau). \quad (35)$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$q_\omega(\tau) = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} n_\omega(l, \tau).$$

بنابراین رابطه نهایی (31) را باید به شکل زیر اصلاح کنیم:

$$\tau \frac{d}{d\tau} Q^{(1)}(\tau) = -\frac{1}{2} N q_{\omega}(\tau) \quad (۳۶)$$

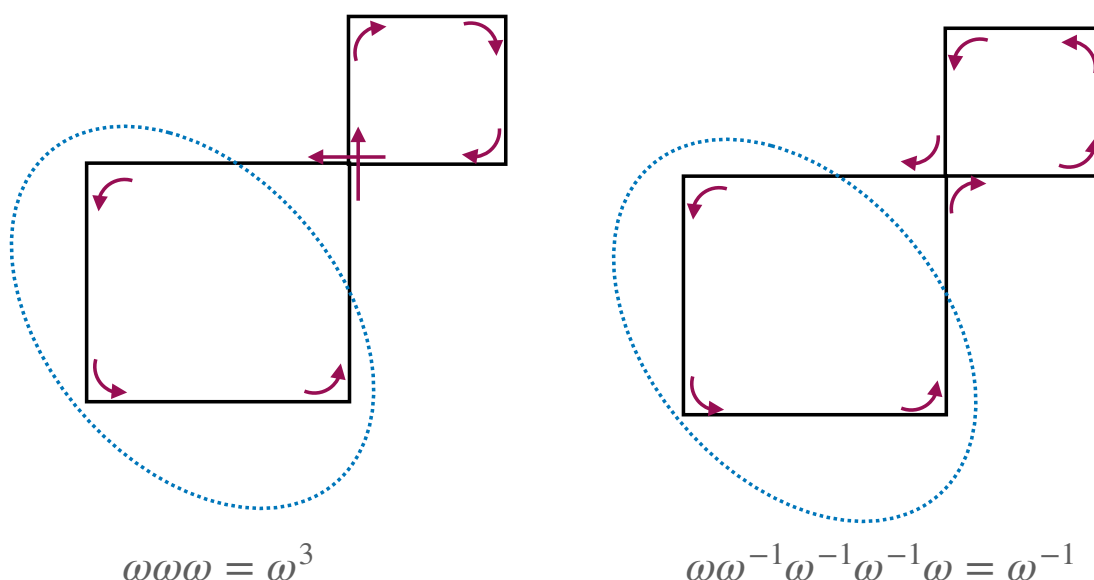


شکل ۲: گراف های مجاز در حل مدل آیزینگ. گراف های a و b مجاز و گراف های c و d غیرمجازند، چون شامل ضلع هایی هستند که دوبار طی شده اند. چنین جملاتی در بسط تابع پارش مدل آیزینگ نمی بایست پدیدار شوند.

■ الف - چگونگی حذف مسیرهای متقاطع در رتبه یک: شکل (۳)

هرگاه یک مسیر بدون تقاطع را در نظر بگیریم این مسیر در دو جهت ساعت گرد یا پادساعت گرد می تواند طی شود. به این ترتیب کل امتیازی که به آن داده می شود برابر با ۲- است. می توانیم در پایان تعداد مسیرها را بر دو تقسیم کنیم تا عدد واقعی بدست آید. نکته اصلی این است که در رتبه یک یعنی در تابع $Q^{(1)}(\tau)$ هیچ مسیر متقاطعی شمرده نشود. بنابراین، کار این امتیازها این است که به مسیرهایی که خود را قطع می کنند در همان شمارش اولیه در رتبه یک امتیاز صفر بدهند و کاری کنند که این مسیرها در تابع $Q^{(1)}(\tau)$ پدیدار نشوند. برای این که ببینیم آیا این

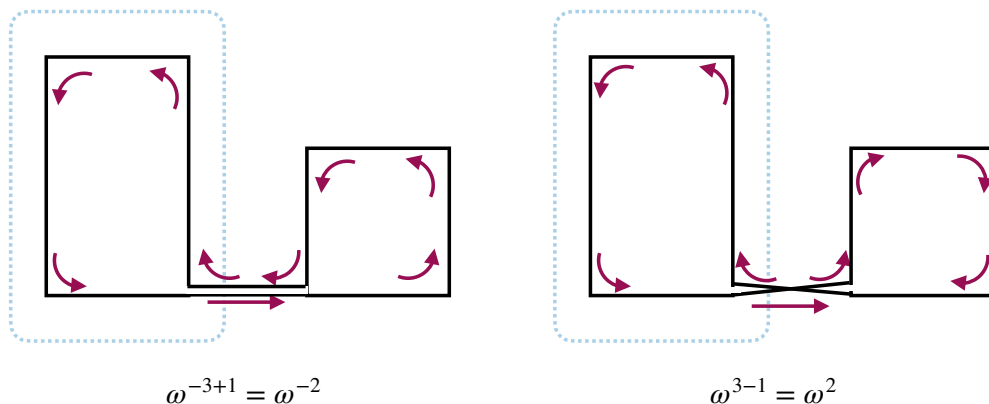
مقصود عملی می شود یا نه، یک مسیر متقاطع را در نظر بگیریم مثل مسیری که در شکل (۳) نشان داده شده است. از نقطه سیاه رنگ شروع کنید و مطابق با قاعده (۳۳) به مسیرهای شکل های a و b امتیاز بدهید. خواهید دید که امتیاز این دو یکدیگر را خنثی می کنند.



شکل ۳: هرگاه از نقطه سیاه رنگ شروع کنیم و مطابق با قاعده (۳۳) به مسیرهای شکل های سمت چپ و راست امتیاز بدهیم، مجموع امتیاز ها برابر با ۰ خواهد بود. قسمت درون خط چین برای هر دو شکل یکسان و بنابراین دارای امتیاز یکسان است. این امتیاز را با η نشان داده ایم که می تواند امتیاز یک حلقه بسیار پیچیده باشد.

■ ب- چگونگی حذف مسیرهای رتبه یک که در آن ها یک ضلع دوبار طی شده است، شکل (۴).

به مسیرهای نشان داده شده در شکل (۴) نگاه می کنیم. این مسیرها به معنایی که قبلا گفتیم متقاطع نیستند و با آنچه که در شکل (۳) دیدیم متفاوتند. چنین مسیرهایی در همان رتبه یک نمی بایست پدیدار شوند. حال باید ببینیم آیا این اتفاق رخ می دهد یا نه. اگر به دو مسیر (a) و (b) در شکل (۴) نگاه کنیم و از یک نقطه مثلا نقطه سیاه رنگ روی این مسیرها شروع کنیم و مطابق با قاعده (۳۳) به هر مسیر امتیاز بدهیم خواهیم دید که امتیاز دو مسیر یک دیگر را خنثی می کنند.



شکل ۴: بازهم از نقطه سیاه رنگ شروع کنید و مطابق با قاعده (۳۳) به گام ها امتیاز بدهید. خواهید دید که یکی از دیاگرام ها امتیاز یک و دیگری امتیاز منهای یک خواهد گرفت و در نتیجه این نوع دیاگرام در رتبه یک ظاهر نخواهد شد.

■ پ - چگونگی حذف مسیرهای غیرمجاز در رتبه های بالا، شکل (۵) .

اما یک نکته دیگر باقی مانده است و آن اینکه با وجود تمام تمهیداتی که در بندهای الف و ب چیدیم بازهم ممکن است مسیرهایی در رتبه های بالاتر پدید آیند که مجاز نباشند مثل مسیرهای سمت چپ در شکل (۵). این مسیر ها در رتبه دو از کنار هم قرار گرفتن دو مسیر غیرمتقاطع و کاملاً مجاز پدیدار می شود ولی می دانیم که در تابع پارش مدل آیزینگ چنین مسیری نمی بایست وجود داشته باشد. حال می خواهیم نشان دهیم که چنین مسیری نیز به طرز معجزه آسایی حذف می شود. نحوه حذف شدن اش نیز به این ترتیب است که با یک دیاگرام مشابه در رتبه یک حذف می شود. دقت کنید که هیچ کدام از تمهیداتی که در نظر گرفته ایم مانع ظهور مسیر سمت راست در شکل (۵) در رتبه یک نمی شود. اگر به بسط مسیر ها نگاه کنیم، چنین چیزی می بینیم:

$$Q(\tau) = 1 + Q^{(1)}(\tau) + [Q^{(1)}(\tau)]^2 + \dots = 1 + (\alpha^+ + \alpha^- + \beta^+ + \beta^- + \gamma^+ + \gamma^- + \dots) + \frac{1}{2}(\alpha^+ + \alpha^- + \beta^+ + \beta^- + \gamma^+ + \gamma^- + \dots)^2 + \dots \quad (37)$$

که در آن فقط به تابع $Q(\tau)$ توجه کرده ایم و ضرایب مختلف را نادیده گرفته ایم. هم چنین عبارت $\dots$ نشان دهنده سهم جمله های دیگر است . در شکل (۵) حلقه های سمت چپ همه غیر مجاز هستند. این حلقه ها در رتبه دوم از کنار هم قرار گرفتن مسیرهای مجاز در رتبه اول یعنی

$\alpha^+, \alpha^-, \beta^+, \beta^-$ پدیدار می شوند. اما با امتیاز هایی که قرار داده ایم سهم این مسیرها توسط مسیرهای مجاز γ^+ و γ^- حذف می شوند. در واقع می خواهیم نشان دهیم که تساوی زیر برقرار است:

$$\gamma^+ + \gamma^- + \frac{1}{2}(2\alpha^+\beta^+ + 2\alpha^+\beta^- + 2\alpha^-\beta^+ + 2\alpha^-\beta^-) = 0 \quad (38)$$

برای این کار فقط به امتیاز ها نگاه کنیم و از ضریب τ^l که برای هر دو مسیر یکی است توجه نمی کنیم. داریم:

$$\alpha^+ = \alpha^- = \beta^+ = \beta^- = \frac{e^{\frac{-\pm i\pi}{4} \times 4}}{-2} = \frac{1}{2}, \quad (39)$$

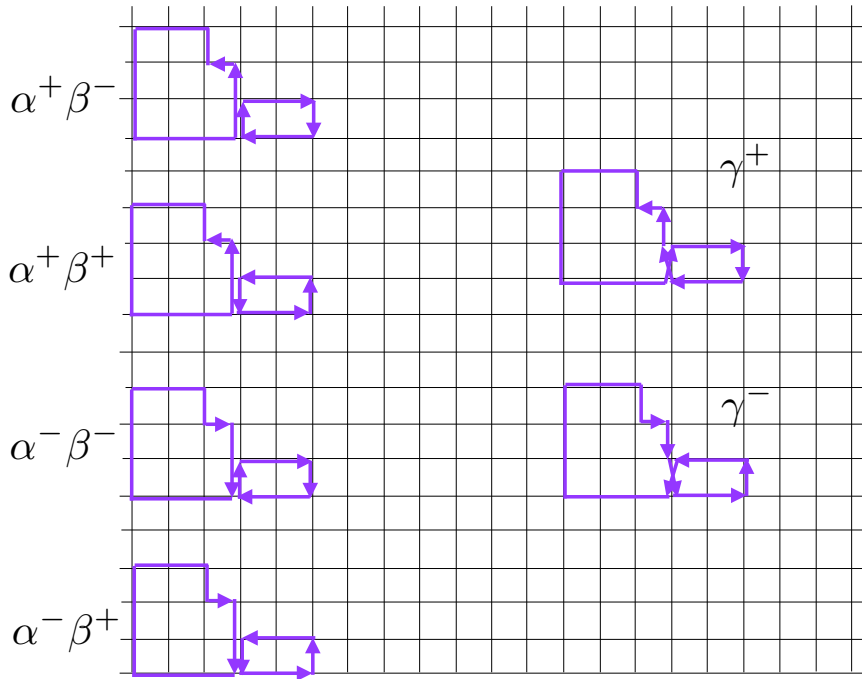
$$\gamma^\pm = \frac{e^{\frac{\mp i\pi}{4} \times 0}}{-2} = \frac{-1}{2}. \quad (40)$$

بنابراین رابطه (38) برقرار خواهد شد.

۲.۴ شمارش دقیق مسیرهای نامتقاطع

حال به نقطه ای رسیده ایم که می توانیم شمارش منحنی ها را بدون نگرانی از دوباره شماری آنها و یا شمارش منحنی های غیر مجاز شروع کنیم. هدف ما آن است که تعداد مسیرهای بسته به طول l را که یک ذره می تواند در شبکه طی کند بشماریم. فرض کنید که تعداد این مسیرها وقتی که این ذره از نقطه مبدأ شروع به حرکت کند برابر با n_l باشد. در این صورت تعداد کل مسیر هایی که می تواند در شبکه طی کند برابر است با $N_l := \frac{N n_l}{l}$. بنابراین کافی است که خود را محدود به مسیرهایی کنیم که از مبدأ شروع می شوند. مسئله ما حالا یک شکل کاملاً مشخص پیدا کرده است که در زیر برای وضوح آن را دوباره می نویسیم:

■ **مسئله:** متحرکی از مبدأ شروع به حرکت می کند. در هر گام که به جلو برمی دارد امتیاز τ را ذخیره می کند، در هر گردش به راست امتیاز $\tau e^{i\frac{\pi}{4}}$ و در هر گردش به چپ امتیاز $\tau e^{-i\frac{\pi}{4}}$ را ذخیره می کند. در هر گام که به عقب برمی دارد نیز امتیاز صفر را ذخیره می کند. وقتی که این متحرک به نقطه مبدأ بازمی گردد امتیازی را ذخیره کرده است. می خواهیم بدانیم که کل امتیازی را که این ذره می تواند با طی کردن تمام مسیرهای ممکن با طول l ذخیره کند چقدر است. هرگاه این امتیاز کل را محاسبه کنیم با تقسیم آن بر 2- تعداد کل مسیرهای بسته به طول l ، یعنی n_l را بدست می آوریم. قبل از اینکه حل مسئله کلی را بنویسیم به این تمرین توجه کنید و آن را حل کنید.



شکل ۵: حلقه های سمت چپ همه غیر مجاز هستند. این حلقه ها در رتبه دوم از کنار هم قرار گرفتن مسیرهای مجاز در رتبه اول یعنی $\alpha^+, \alpha^-, \beta^+, \beta^-$ پدیدار می شوند. اما با امتیازهایی که قرار داده ایم سهم این مسیرها توسط مسیرهای γ^+ و γ^- که خود نیز غیر مجاز هستند، حذف می شوند.

■ **تمرین:** فرض کنید که ذره از نقطه $(0,0)$ شروع به حرکت می کند و پس از طی k قدم به نقطه (x,y) می رسد. در این صورت امتیاز کلی که جمع کرده است را با $M_k(x,y)$ نشان می دهیم. مسیرها می توانند خود را قطع کنند یا نکنند. مقادیر زیر را مستقیماً حساب کنید:

$$M_2(2,2), \quad M_3(2,2), \quad M_4(2,2), \quad M_5(2,2), \quad M_6(2,2). \quad (41)$$

هم چنین مقادیر زیر را حساب کنید:

$$M_6(3,3), \quad M_8(3,3). \quad (42)$$

با توجه به تعریف هایی که قبلاً داشته ایم داریم:

$$M_l(0,0) \equiv n_\omega(l,\tau).$$

چگونه می توان چنین چیز پیچیده ای را حساب کرد؟ راه اش نوشتن یک رابطه تکرار است. مثلا شاید بتوان $M_l(0,0)$ را به $M_{l-1}(0,0)$ ربط داد. به یک مرتبه نمی توانیم چنین رابطه تکراری را بنویسیم بلکه می بایست مرحله به مرحله پیش برویم. مثلا می توان $M_l(x,y)$ را به $M_{l-1}(x',y')$ ربط داد که در آن (x',y') یکی از همسایه های (x,y) است. کمی که بیشتر فکر کنیم متوجه می شویم که $M_l(x,y)$ را می بایست به صورت زیر تجربه کنیم و بشکنیم. قدم آخری که ذره برای رسیدن به نقطه (x,y) بردارد می تواند رو به بالا، رو به پایین، رو به سمت راست و یا رو به سمت چپ باشد که امتیازهای مربوطه را به ترتیب با $U_l(x,y)$ ، $D_l(x,y)$ ، $R_l(x,y)$ و $L_l(x,y)$ نشان می دهیم. در نتیجه داریم:

$$M_l(x,y) = U_l(x,y) + D_l(x,y) + R_l(x,y) + L_l(x,y).$$

حال برای این توابع می توانیم یک رابطه تکرار بنویسیم:

$$\begin{aligned} U_k(x,y) &= \tau U_{k-1}(x,y-1) + 0 D_{k-1}(x,y-1) + \omega^{-1} \tau R_{k-1}(x,y-1) + \omega L_{k-1}(x,y-1) \\ D_k(x,y) &= 0 U_{k-1}(x,y+1) + \tau D_{k-1}(x,y+1) + \omega \tau R_{k-1}(x,y+1) + \omega^{-1} \tau L_{k-1}(x,y+1) \\ R_k(x,y) &= \omega \tau U_{k-1}(x-1,y) + \omega^{-1} \tau D_{k-1}(x-1,y) + \tau R_{k-1}(x-1,y) + 0 L_{k-1}(x-1,y) \\ L_k(x,y) &= \omega^{-1} \tau U_{k-1}(x+1,y) + \omega \tau D_{k-1}(x+1,y) + 0 R_{k-1}(x+1,y) + \tau L_{k-1}(x+1,y) \end{aligned} \quad (43)$$

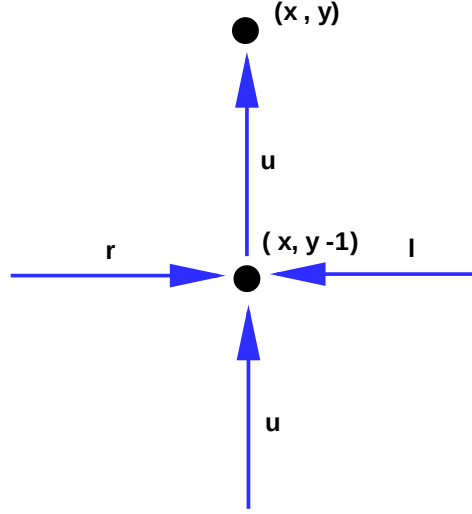
روابط تکرار فوق برحسب مودهای فوریه ساده تر می شوند:

$$\hat{U}_k(p,q) = \sum_{x,y} e^{ipx+iqy} U_k(x,y), \quad (44)$$

$$U(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq e^{-ipx-iqy} \hat{U}(p,q). \quad (45)$$

با تعریف مشابهی برای دیگر توابع D, R, L روابط تکرار برای مودهای فوریه به صورت زیر درمی آیند:

$$\begin{aligned} \hat{U}_k(p,q) &= \tau e^{iq} \left(\hat{U}_{k-1}(p,q) + 0 \hat{D}_{k-1}(p,q) + \omega^{-1} \hat{R}_{k-1}(p,q) + \omega \hat{L}_k(p,q) \right) \\ \hat{D}_k(p,q) &= \tau e^{-iq} \left(0 \hat{U}_{k-1}(p,q) + \hat{D}_{k-1}(p,q) + \omega \hat{R}_{k-1}(p,q) + \omega^{-1} \hat{L}_k(p,q) \right) \end{aligned}$$



شکل ۶: شکلی که منجر به نوشتن اولین سطر از معادلات تکرار شده است. برای سطرهای دیگر نیز شکل های مشابه وجود دارد.

$$\begin{aligned}\hat{R}_k(p, q) &= \tau e^{ip} \left(\omega \hat{U}_{k-1}(p, q) + \omega^{-1} \hat{D}_{k-1}(p, q) + \hat{R}_{k-1}(p, q) + 0 \hat{L}_k(p, q) \right) \\ \hat{L}_k(p, q) &= \tau e^{-ip} \left(\omega^{-1} \hat{U}_{k-1}(p, q) + \omega \hat{D}_{k-1}(p, q) + 0 \hat{R}_{k-1}(p, q) + \hat{L}_k(p, q) \right)\end{aligned}\quad (46)$$

این رابطه را می توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_k(p, q) \\ \hat{D}_k(p, q) \\ \hat{R}_k(p, q) \\ \hat{L}_k(p, q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau e^{iq} & 0 & \tau e^{iq} \omega^{-1} & \tau e^{iq} \omega \\ 0 & \tau e^{-iq} & \tau e^{-iq} \omega & \tau e^{-iq} \omega^{-1} \\ \tau e^{ip} \omega & \tau e^{ip} \omega^{-1} & \tau e^{ip} & 0 \\ \tau e^{-ip} \omega^{-1} & \tau e^{-ip} \omega & 0 & \tau e^{-ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_{k-1}(p, q) \\ \hat{D}_{k-1}(p, q) \\ \hat{R}_{k-1}(p, q) \\ \hat{L}_{k-1}(p, q) \end{pmatrix}\quad (47)$$

که می توان آن را به شکل خلاصه زیر نوشت :

$$|\hat{M}_k(p, q)\rangle = \tau S |\hat{M}_{k-1}(p, q)\rangle\quad (48)$$

که در آن S ماتریسی است که بستگی به τ ندارد و

$$|\hat{M}_k(p, q)\rangle = \begin{pmatrix} \hat{U}_k(p, q) \\ \hat{D}_k(p, q) \\ \hat{R}_k(p, q) \\ \hat{L}_k(p, q) \end{pmatrix}.$$

با تکرار این رابطه ماتریسی می‌رسیم به

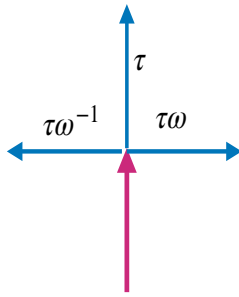
$$|\hat{M}_l(p, q)\rangle = \tau^{l-1} S^{l-1} |\hat{M}_1(p, q)\rangle \quad (49)$$

حال باید به شرایط اولیه توجه کنیم و $|\tilde{M}_1(p, q)\rangle$ را مشخص کنیم. سوال این است که برای قدم اول چه امتیازی باید به ولگرد تعلق گیرد. مثلاً اگر ولگرد اولین قدم را از نقطه مبدا یعنی $(0, 0)$ به طرف راست بردارد، چه امتیازی باید کسب کند؟ پاسخ این است که این امتیاز بستگی به این دارد که آخرین قدم این ولگرد برای رسیدن به نقطه $(0, 0)$ از کدام طرف بوده؟ شکل‌های (۷) و (۸) این امتیاز را مشخص می‌کنند. در این شکل‌ها قدم آخر با رنگ قرمز مشخص شده‌اند. در هر شکل نیز امتیاز قدم اول نوشته شده است.

حال که بسته به قدم آخر امتیاز قدم اول یعنی $(U_1(x, y), D_1(x, y), R_1(x, y), L_1(x, y))$ را می‌دانیم می‌توانیم تبدیل فوریه این‌ها را نیز بدست آوریم. با استفاده از رابطه (۴۴) را می‌دانیم می‌توانیم $(\tilde{U}_1(p, q), \tilde{D}_1(p, q), \tilde{R}_1(p, q), \tilde{L}_1(p, q))$ را نیز حساب کنیم. اما این کمیت‌ها بستگی به این دارند که قدم آخر در چه جهتی طی شده است. با توجه به شکل‌های (۷) و (۸) می‌توانیم تبدیل فوریه قدم اول را در هر مورد بنویسیم. برای این کار و برای مقصودی که بعداً در نظر داریم بردارهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e_4\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

در نتیجه می‌توانیم برای وقتی که قدم آخر رو به بالاست بنویسیم:

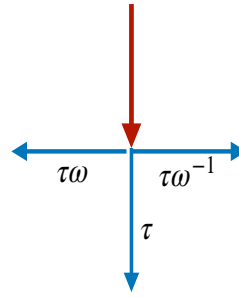


$$U_1(x, y) = \tau \delta_{x,0} \delta_{y,1}$$

$$D_1(x, y) = 0$$

$$R_1(x, y) = \tau \omega \delta_{x,1} \delta_{y,0}$$

$$L_1(x, y) = \tau \omega^{-1} \delta_{x,-1} \delta_{y,0}$$



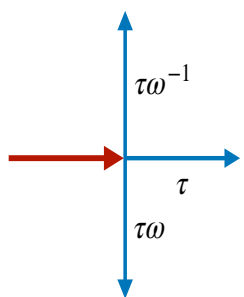
$$U_1(x, y) = 0$$

$$D_1(x, y) = \tau \delta_{x,0} \delta_{y,-1}$$

$$R_1(x, y) = \tau \omega^{-1} \delta_{x,1} \delta_{y,0}$$

$$L_1(x, y) = \tau \omega \delta_{x,-1} \delta_{y,0}$$

شکل ۷: امتیازی که باید به قدم اول داده شود، بستگی دارد که قدم آخر از کدام جهت بوده است. در این شکل آخرین قدم به رنگ قرمز مشخص شده و امتیاز قدم اول نیز روی هر جهت نوشته شده است.

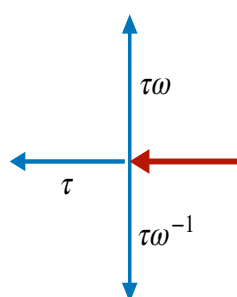


$$U_1(x, y) = \tau\omega^{-1}\delta_{x,0}\delta_{y,1}$$

$$D_1(x, y) = \tau\omega\delta_{x,0}\delta_{y,-1}$$

$$R_1(x, y) = \tau\delta_{x,1}\delta_{y,0}$$

$$L_1(x, y) = 0$$



$$U_1(x, y) = \tau\omega\delta_{x,0}\delta_{y,1}$$

$$D_1(x, y) = \tau\omega^{-1}\delta_{x,0}\delta_{y,-1}$$

$$R_1(x, y) = 0$$

$$L_1(x, y) = \tau\delta_{x,-1}\delta_{y,0}$$

شکل ۸: امتیازی که باید به قدم اول داده شود، بستگی دارد که قدم آخر از کدام جهت بوده است. در این شکل آخرین قدم به رنگ قرمز مشخص شده و امتیاز قدم اول نیز روی هر جهت نوشته شده است.

$$\begin{pmatrix} U_1(p, q) \\ D_1(p, q) \\ R_1(p, q) \\ L_1(p, q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau e^{iq} \\ 0 \\ \tau \omega e^{ip} \\ \tau \omega^{-1} e^{-ip} \end{pmatrix} = \tau S|e_1\rangle \quad (51)$$

و برای وقتی که قدم آخر رو به پایین است:

$$\begin{pmatrix} U_1(p, q) \\ D_1(p, q) \\ R_1(p, q) \\ L_1(p, q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau e^{-iq} \\ \tau \omega^{-1} e^{ip} \\ \tau \omega e^{-ip} \end{pmatrix} = \tau S|e_2\rangle \quad (52)$$

و برای وقتی که قدم آخر رو به راست است:

$$\begin{pmatrix} U_1(p, q) \\ D_1(p, q) \\ R_1(p, q) \\ L_1(p, q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \omega^{-1} e^{iq} \\ \tau \omega e^{-iq} \\ \tau e^{ip} \\ 0 \end{pmatrix} = \tau S|e_3\rangle \quad (53)$$

و بالاخره برای وقتی که قدم آخر رو به چپ است:

$$\begin{pmatrix} U_1(p, q) \\ D_1(p, q) \\ R_1(p, q) \\ L_1(p, q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \omega e^{iq} \\ \tau \omega^{-1} e^{-iq} \\ 0 \\ \tau e^{-ip} \end{pmatrix} = \tau S|e_4\rangle \quad (54)$$

توجه به این روابط و رابطه تکرار (۴۷) بدست می آوریم:

$$\tilde{U}_l(p, q) = \tau^l \langle e_1 | S^l | e_1 \rangle \quad , \quad \tilde{D}_l(p, q) = \tau^l \langle e_2 | S^l | e_2 \rangle \quad , \quad \tilde{R}_l(p, q) = \tau^l \langle e_3 | S^l | e_3 \rangle \quad , \quad \tilde{L}_l(p, q) = \tau^l \langle e_4 | S^l | e_4 \rangle. \quad (55)$$

و از آنجا

$$\tilde{M}_l(p, q) = \tilde{U}(p, q) + \tilde{D}(p, q) + \tilde{R}(p, q) + \tilde{L}(p, q) = \sum_{i=1}^4 \tau^l \langle e_i | S^l | e_i \rangle = \tau^l \text{Tr}(S^l) \quad (56)$$

حال می توانیم تابع $q_\omega(\tau)$ را حساب کنیم:

$$\begin{aligned} q_\omega(\tau) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq \sum_{l=1}^{\infty} \text{Tr}(\tau^l S^l) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq (\text{Tr}(\sum_{l=0}^{\infty} \tau^l S^l - I)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq (\text{Tr}(\frac{1}{I - \tau S} - I)). \end{aligned} \quad (57)$$

هدف ما بدست آوردن تابع $Q^1(\tau)$ است. با توجه به رابطه (۳۶) یعنی

$$\tau \frac{d}{d\tau} Q^{(1)}(\tau) = -\frac{1}{2} N q_\omega(\tau) \quad (58)$$

می نویسیم:

$$Q^{(1)}(\tau) = -N \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\tau \frac{\tilde{q}(t)}{t} dt = -\frac{1}{2} \int_0^\tau \left[\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq (\text{Tr}(\frac{1}{t(I - tS)} - \frac{I}{t})) \right] \quad (59)$$

یا

$$Q^{(1)}(\tau) = -N \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq \int_0^\tau \text{Tr}(\frac{1}{t(I - tS)} - \frac{I}{t}) dt. \quad (60)$$

محاسبه انتگرال روی t ساده است و خواهیم داشت:

$$\int_0^\tau \text{Tr}(\frac{1}{t(I - tS)} - \frac{I}{t}) dt = \int_0^\tau dt \left[\frac{S}{1 - tS} \right] = -\ln(I - tS) \quad (61)$$

در نتیجه

$$Q^{(1)}(\tau) = \frac{N}{2} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq \text{Tr}(\ln(I - \tau S)) \quad (62)$$

برای محاسبه رد ماتریس آخری، از یک اتحاد شناخته شده و ساده استفاده می کنیم (این اتحاد را براحتی می توانید با قطری کردن ماتریس ثابت

کنید): که برای هر ماتریس قطری پذیری برقرار است:

$$e^{\text{Tr} A} = \det(e^A) \quad (63)$$

شکل دیگر این اتحاد به صورت زیر است

$$\det(X) = e^{Tr \ln X} \quad (۶۴)$$

که در نتیجه آن خواهیم داشت

$$Tr(\ln X) = \ln \det(X). \quad (۶۵)$$

بنابراین بدست می آوریم:

$$Q^{(1)}(\tau) = \frac{N}{2} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq \ln \det(I - \tau S) \quad (۶۶)$$

اما محاسبه دترمینان این ماتریس خیلی ساده است:

$$\det(I - \tau S) = \det \begin{pmatrix} 1 - \tau e^{iq} & 0 & -\tau e^{iq}\omega^{-1} & -\tau e^{iq}\omega \\ 0 & 1 - \tau e^{-iq} & -\tau e^{-iq}\omega & -\tau e^{-iq}\omega^{-1} \\ -\tau e^{ip}\omega & -\tau e^{ip}\omega^{-1} & 1 - \tau e^{ip} & 0 \\ -\tau e^{-ip}\omega^{-1} & -\tau e^{-ip}\omega & 0 & 1 - \tau e^{-ip} \end{pmatrix} \quad (۶۷)$$

dh

$$\det(1 - \tau S) = (\tau^2 + 1)^2 - 2\tau(1 - \tau^2)(\cos p + \cos q). \quad (۶۸)$$

به این ترتیب به نتیجه نهایی می رسم:

$$Q^{(1)}(\tau) = \frac{N}{2} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq \ln [(\tau^2 + 1)^2 - 2\tau(1 - \tau^2)(\cos p + \cos q)]. \quad (۶۹)$$

حال به مرحله ای رسیده ایم که می توانیم تابع پارش کل را بطور دقیق بنویسیم:

$$Z(\tau) = (\cosh \beta J)^{2N} e^{Q^{(1)}(\tau)} \quad (۷۰)$$

و در نتیجه تابع انرژی آزاد برابر است با:

$$F(\beta J) = -kT \ln Z = -2kTN \ln(\cosh \beta J) - kTQ^{(1)}(\tau). \quad (۷۱)$$

تابع انرژی آزاد بر واحد اسپین به صورت نهایی زیر در می آید:

$$f(\beta J) = -2kT \ln(\cosh \beta J) - \frac{kT}{2} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq \ln [(\tau^2 + 1)^2 - 2\tau(1 - \tau^2)(\cos p + \cos q)] . \quad (72)$$

با استفاده از این که $\tau = \tanh \beta J$ و کمی استفاده از اتحادهای مثلثاتی که بر عهده خواننده است، تابع پارش به صورت زیر ساده می شود:

$$f(\beta J) = -\frac{kT}{2} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq \ln [(\cosh 2\beta J)^2 - (\sinh 2\beta J)(\cos p + \cos q)] . \quad (73)$$

از این تابع انرژی آزاد چه می فهمیم؟ اگر این تابع بر حسب βJ یک تابع تحلیلی (یعنی پیوسته و مشتق پذیر) باشد، معنایش این است که رفتار کمیت های ترمودینامیکی مثل ظرفیت گرمایی ویژه در همه دما ها پیوسته است و هیچگونه گذار فازی در مدل آیزینگ دو بعدی وجود ندارد. اما اگر این تابع نقطه تکینی داشته باشد به این معناست که در آن نقطه رفتار توابع ترمودینامیکی به طور ناپیوسته تغییر می کند و در نتیجه در آن نقطه یک گذار فاز رخ می دهد. با نگاه کردن به شکل این تابع می توانیم بفهمیم که تنها نقطه ای که امکان تکین بودن دارد، نقطه ای است که در آن متغیر درون لگاریتم صفر می شود، زیرا در بقیه نقاط ما با انتگرال یک تابع معمولی و غیرتکین روبرو هستیم. بنابراین نقطه تکین وقتی رخ می دهد که داشته باشیم:

$$\cosh^2(2\beta J) = \sinh(2\beta J)(\cos p + \cos q). \quad (74)$$

اما تابع $\frac{\cosh^2 x}{\sinh x}$ همواره از دو بزرگتر و $\cos p + \cos q$ همواره از ۲ کوچک تر است. بنابراین متغیر لگاریتم تنها در نقطه ای رخ می دهد که $p = q = 0$ باشد و داشته باشیم

$$\cosh^2 2\beta J = 2 \sinh 2\beta J. \quad (75)$$

حل این معادله نقطه بحرانی را بدست می دهد:

$$T_c = \frac{J}{k \ln(1 + \sqrt{2})}. \quad (76)$$

می توان نشان داد که در این نقطه ظرفیت گرمایی ویژه یعنی $C = -\frac{d^2 f}{dT^2}$ بی نهایت می شود که خود نشانه روشن دیگری است از گذار فاز. این کار را خواننده می تواند نشان دهد. کافی است که به رفتار انتگرال در بازه نزدیک $(p, q) = (0, 0)$ نگاه کند و $\cos p + \cos q$ را بسط دهد.

۵ مسئله ها

■ مسئله یک: (موعد تحویل: ۳۰ اردیبهشت ماه ۱۳۹۹) مدل آیزینگ را با میدان مغناطیسی ولی با شرایط مرزی ثابت زیر در نظر بگیرید:

$$S_1 = 1, \quad S_N = 1. \quad (۷۷)$$

با استفاده از روش ماتریس انتقال تابع پارش را حساب کنید و نشان دهید که در حد ترمودینامیک انرژی آزاد با آنچه که تحت شرایط مرزی پریودیک بدست می آورید یکی است.

■ مسئله دو: (موعد تحویل: ۳۰ اردیبهشت ماه ۱۳۹۹) مدل آیزینگ را با شرایط مرزی آزاد در نظر بگیرید به این معنا که اسپین های سر و ته زنجیره می توانند هر مقداری را اختیار کنند ولی الزاما با هم برابر نیستند. با استفاده از روش ماتریس انتقال تابع پارش را حساب کنید و نشان دهید که در حد ترمودینامیک انرژی آزاد با آنچه که تحت شرایط مرزی پریودیک بدست می آورید یکی است.

■ مسئله سه: (موعد تحویل: ۳۰ اردیبهشت ماه ۱۳۹۹) مدل آیزینگ را در میدان مغناطیسی صفر در نظر بگیرید ولی فرض کنید که ثابت جفتدگی اسپین های مجاور به ترتیب J و $-J$ است. تابع پارش را بدست آورید و از روی آن انرژی آزاد را محاسبه کنید.

■ مسئله چهار: (موعد تحویل: ۳۰ اردیبهشت ماه ۱۳۹۹) یک سیستم یک بعدی اسپین با هامیلتونی پادفرومغناطیسی زیر در نظر بگیرید:

$$H = J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} - B \sum_{i=1}^N (-1)^i S_i \quad (۷۸)$$

شرایط مرزی را پریودیک در نظر بگیرید و طول رشته را طوری بگیرید که این نوع شرط امکان پذیر باشد. حال تابع پارش را محاسبه کنید و سپس مغناطش متناوب را که به صورت زیر تعریف می شود حساب کنید:

$$M_s := \langle \sum_{i=1}^N (-1)^i S_i \rangle. \quad (۷۹)$$

تغییرات M_s را به B حساب کنید. می توانید این کمیت را χ_s بنامید.

■ مسئله پنج: (موعد تحویل: ۳۰ اردیبهشت ماه ۱۳۹۹) یک زنجیره اسپینی را با هامیلتونی زیر در نظر بگیرید:

$$H = \sum_{i=1}^N -JS_i S_{i+1} - KS_i S_{i+2} - B \sum_{i=1}^N S_i. \quad (۸۰)$$

در این زنجیره هر اسپین با نزدیک ترین همسایه و هم چنین همسایه بعدی اش برهم کنش می کند. آیا این مدل گذار فاز از خود نشان می دهد؟ مغناطش را بر حسب میدان مغناطیسی بدست آورید. آیا مغناطش خود بخود پدیدار می شود؟

■ مسئله شش: (موعد تحویل: ۱۰ خردادماه ۱۳۹۹) در متن درس تابع همبستگی را برای مدل آیزینگ از روش مستقیم حساب کردیم. حال

با استفاده از روش ماتریس انتقال و استفاده از رابطه $G(i, j) = kT \frac{\partial \langle S_i \rangle}{\partial B_j}$ تابع همبستگی را حساب کنید.

■ مسئله هفت: (موعد تحویل: ۱۰ خرداد ماه ۱۳۹۹) مدل $Q - State Potts$ به صورت زیر تعریف می شود. در هر نقطه ی i از شبکه

یک متغیر S_i وجود دارد که می تواند Q متغیر متمایز از مجموعه $\{1, 2, \dots, Q\}$ اختیار کند.

هامیلتونی به شکل زیر است:

$$H = -J \sum_{i=1}^N \delta_{S_i, S_{i+1}} \quad (۸۱)$$

در این مسئله توجه خود را به حالت $Q = 3$ معطوف می کنیم.

الف: زنجیره را باز بگیرید و با هر روشی که می توانید تابع پارش این مدل را حساب کنید. متوسط $\langle S_i \rangle$ و تابع همبستگی $\langle S_i S_j \rangle$ را حساب کنید. طول هم بستگی را بدست آورید.

ب: یک میدان خارجی اضافه کنید که در اثر آن هامیلتونی به شکل زیر در می آید:

$$H = -J \sum_{i=1}^N \delta_{S_i, S_{i+1}} - B \sum_{i=1}^N \delta_{S_i, 1}. \quad (۸۲)$$

با محاسبه تابع پارش متوسط $\langle S_i \rangle$ را حساب کنید. در این قسمت شرایط مرزی را پیروی در نظر بگیرید.

■ مسئله هشت: (موعد تحویل: ۱۰ خرداد ماه ۱۳۹۹) در مدل آیزینگ بدون میدان مغناطیسی و با شرایط مرزی پریودیک احتمال این را که 3 اسپین مجاور مقدار یکسان داشته باشند را حساب کنید. نتیجه خود را به k اسپین تعمیم دهید.

■ مسئله نه: (موعد تحویل: ۲۰ خردادماه ۱۳۹۹) مدل آیزینگ را روی یک زنجیره باز با طول N در نظر بگیرید. فرض کنید میدان مغناطیسی نیز برابر با صفر است. به حالتی که k تا اسپین سمت چپ همه در یک حالت مثلاً $+1$ هستند و بقیه اسپین های سمت راست در حالت -1 هستند اصطلاحاً حالتی با یک دیواره حوزه 13 می گویند.

الف: احتمال اینکه در سیستم یک دیواره حوزه وجود داشته باشد چقدر است؟

ب: احتمال اینکه در یک سیستم 2 تا دیواره حوزه وجود داشته باشد چقدر است؟

ج: انرژی یک حالت برحسب تعداد دیواره های حوزه ای که دارد بنویسید. با شمارش تعداد حالت هایی که دارای k تا دیواره حوزه دارند تابع پارش مدل آیزینگ را حساب کنید.

د: تعداد متوسط دیواره های حوزه را در یک دمای خاص حساب کنید.

■ مسئله ده: (موعد تحویل: ۲۰ خردادماه ۱۳۹۹) مدل $3 - State Potts$ را با هامیلتونی زیر در نظر بگیرید: شرایط مرزی را پریودیک در نظر بگیرید:

$$H = -J \sum_{i=1}^N \delta_{S_i, S_{i+1}}. \quad (۸۳)$$

Domain Wall^{۱۳}

الف: تابع پارش این سیستم را حساب کنید.

ب: احتمال اینکه دو تا سایت متوالی در یک حالت قرار داشته باشند را محاسبه کنید.

پ: احتمال اینکه سه تا سایت متوالی در یک حالت قرار داشته باشند را حساب کنید.

■ مسئله یازده: با استفاده از بسط دمای بالا تابع پارش مدل آیزینگ یک بعدی را وقتی که میدان مغناطیسی صفر است به طور دقیق بدست آورید. هم چنین با استفاده از این روش تابع همبستگی بین دو اسپین را بدست آورید. شرایط مرزی را پرودیک در نظر بگیرید.

■ مسئله دوازده: (موعد تحویل: ۲۰ خردادماه ۱۳۹۹) تابع پارش مدل آیزینگ دو بعدی را در غیاب میدان مغناطیسی تا مرتبه τ^8 بدست آورید. در این جا $\tau = \tanh(\frac{J}{kT})$. هم چنین تا این رتبه تابع همبستگی بین دو اسپین دلخواه را بدست آورید.

■ مسئله سیزده: (موعد تحویل: ۲۰ خردادماه ۱۳۹۹) روشی را که برای بسط دمای بالا در مدل آیزینگ به کار بردیم برای مدل Q حالت پاتر $Potts$ در دو بعد تعمیم دهید. پارامتر اختلال را مشخص کنید. جملات اول بسط اختلالی برای تابع پارش را بدست آورید.

■ مسئله چهارده: (موعد تحویل: ۲۰ خردادماه ۱۳۹۹) مدل ۳ حالت پاتر را روی یک شبکه یک بعدی با شرایط مرزی پرودیک در نظر بگیرید. با استفاده از بسط دمای بالا تابع پارش این مدل را به صورت دقیق حساب کنید. آیا این مدل از خود گذار فاز نشان می دهد؟

■ مسئله پانزده: (موعد تحویل: ۲۰ خردادماه ۱۳۹۹) در مدل آیزینگ دو بعدی فرض کنید که دما پایین است یعنی $J \ll kT$. تابع پارش را تا مرتبه ۸ از پارامتر $\epsilon := e^{-\frac{J}{kT}}$ بدست آورید.

■ مسئله شانزده: نشان دهید که در نقطه بحرانی مدل آیزینگ دوبعدی ظرفیت گرمایی ویژه یعنی $C = -\frac{d^2 f}{dT^2}$ بی نهایت می شود که خود نشانه

روشن دیگری است از گذار فاز. برای این کار کافی است که به رفتار انتگرال در بازه نزدیک $(p, q) = (0, 0)$ نگاه کنید و $\cos p + \cos q$ را بسط دهید.

۶ ضمیمه: تاریخچه کوتاهی از حل مدل آیزینگ

در طول سه درس گذشته به حل های متفاوت مدل آیزینگ پرداخته ایم. اگر چه در هر قسمت توضیح داده ایم که این حل ها چگونه ابداع شده اند، اینک بد نیست که تاریخچه کوتاهی را از حل مدل آیزینگ در این ضمیمه جمع آوری کنیم. این تاریخچه کوتاه سهم افراد مختلف و راه های متفاوتی را که آنها پیموده اند، البته به تقریب مشخص می کند. طبیعی است که این ضمیمه کوتاه جایگزینی برای تاریخ بررسی مدل آیزینگ به عنوان یکی از مهم ترین مدل های مکانیک آماری نمی گیرد، اما ممکن است که خواننده را برای بررسی های بیشتر و عمیق تر تشویق کند.

ایده اولیه مغناطیس جمعی به اوایل قرن بیستم بازمی گردد. در سال ۱۹۰۷، پیر وایس^{۱۴} نظریه میدان مولکولی را معرفی کرد. او فرض کرد که هر ممان مغناطیسی تحت تأثیر یک میدان مؤثر ناشی از متوسط مغناطش همسایه ها قرار دارد. این نظریه توانست قانون کوری-وایس را توضیح دهد، اما نوسانات و همبستگی های فضایی را نادیده می گرفت.

در سال ۱۹۲۰، ویلهلم لنتس^{۱۵} یک مدل شبکه ای ساده برای فرومغناطیس پیشنهاد کرد که در آن هر اسپین تنها دو حالت داشت. ارنست ایزینگ^{۱۶}، دانشجوی لنتس، این مدل را در رساله دکترای خود (۱۹۲۵) در یک بعد حل کرد و نشان داد که در یک بعد، هیچ گذار فازی در دمای غیرصفر وجود ندارد. ایزینگ (به اشتباه) نتیجه گرفت که این مدل در هیچ بعدی گذار فاز ندارد.

در دهه ۱۹۳۰، ایده های میدان میانگین به طور سیستماتیک به مدل ایزینگ اعمال شدند. براگ و ویلیامز^{۱۷} با یک تقریب ترمودینامیکی نشان دادند که مدل ایزینگ در میدان میانگین دارای گذار فاز است. این روش از نظر مفهومی با نظریه وایس معادل بود، اما به صورت انرژی-آنتروپی فرمول بندی شد.

^{۱۴}Pierre Weiss

^{۱۵}Wilhelm Lenz

^{۱۶}Ernst Ising

^{۱۷}Bragg-Williams

یک پیشرفت اساسی در سال ۱۹۳۶ توسط رودولف پیرلز^{۱۸} حاصل شد. او نشان داد که در ابعاد دو و بالاتر، حالت فرومغناطیسی در دماهای پایین پایدار است. استدلال پیرلز نشان داد که علت عدم گذار فاز در یک بعد، ماهیت هندسی دیواره‌های حوزه^{۱۹} و غلبه آنتروپی بر انرژی است. این اولین برهان کیفی و غیرتقریبی برای وجود گذار فاز در مدل ایزینگ دوبعدی بود.

در سال ۱۹۴۴، لارس اونساگر^{۲۰} مدل ایزینگ دوبعدی بدون میدان خارجی را به‌طور دقیق حل کرد. این یکی از شاهکارهای فیزیک نظری قرن بیستم است و برای نخستین بار نشان داد که گذار فاز چگونه از یک نظریه میکروسکوپی دقیق پدیدار می‌شود.

در دهه‌های بعد، روش‌های پیشرفته‌تری توسعه یافتند: نظریه لاندائو-گینزبورگ، گروه بازبهنجارش (ویلسون، دهه ۱۹۷۰)، و بسط‌های میدان میانگین بهبودیافته مانند تقریب بت-پیرلز^{۲۱}. این پیشرفت‌ها نشان دادند که میدان میانگین تنها در ابعاد بالاتر از $d=4$ بعد بحرانی بالا (d=4) دقیق می‌شود.

امروزه مدل ایزینگ نه تنها در مغناطیس، بلکه در نظریه اطلاعات، شبکه‌ها، زیست‌فیزیک، علوم اجتماعی و حتی یادگیری ماشین کاربرد دارد و همچنان یکی از ستون‌های فیزیک آماری محسوب می‌شود.

۷ ضمیمه: قضیه پرون-فروبنیوس

روش ماتریس انتقال بخصوص وقتی که توابع همبستگی را حساب می‌کنیم متکی است بر قضیه پرون-فروبنیوس^{۲۲}. این قضیه بیان می‌کند که هرگاه درایه‌های یک ماتریس T اکیدا مثبت باشند آنگاه بزرگترین مقدار ویژه این ماتریس یکتاست و واگنی ندارد.

نخست به این نکته توجه می‌کنیم که رد ماتریس T مثبت است بنابراین بزرگترین ویژه مقدار آن حتما مثبت است. برای بقیه اثبات نخست به قضیه نخست به قضیه رایلی^{۲۳} توجه می‌کنیم. بر مبنای این قضیه هرگاه یک ماتریس هرمیتی T داشته باشیم، و کمیت $\langle v|T|v \rangle$ در مجموعه بردارهای بهنجار $|v\rangle$ حساب کنیم، نقاط اکسترمم این تابع همان ویژه بردارهای T هستند. برای اثبات این تابع کافی است که با استفاده از ضرایب

^{۱۸}Rudolf Peierls

^{۱۹}domain walls

^{۲۰}Lars Onsager

^{۲۱}Bethe-Peierls

^{۲۲}Peron-Ferrobienius

^{۲۳}Rayleigh

لاگرانژ وردش رتبه یک تابع

$$F(v) := \langle v|T|v \rangle - \lambda \langle v|v \rangle \quad (۸۴)$$

را مساوی با صفر قرار دهیم. این وردش منجر خواهد شد به:

$$\langle \delta v|(T - \lambda I)|v \rangle + \langle v|(T - \lambda I)|\delta v \rangle = 0. \quad (۸۵)$$

هرگاه به جای δv قرار دهیم $i\delta v$ به جای رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\langle \delta v|(T - \lambda I)|v \rangle - \langle v|(T - \lambda I)|\delta v \rangle = 0. \quad (۸۶)$$

که در نتیجه ترکیب دو رابطه به نتیجه مورد نظر خواهیم رسید یعنی $\langle v|T|v \rangle = \lambda \langle v|v \rangle$ که در ضمن بیان می کند ضریب لاگرانژ همان ویژه مقدار است. این خاصیت برای همه ویژه مقدار ها برقرار است. اما برای بزرگترین ویژه مقدار یک خاصیت اضافه برقرار است به این معنا که نقطه مربوطه تنها اکسترم نیست بلکه ماکزیمم است. برای فهم آن هم کافی است که عبارت $F(v_0 + \delta v)$ را که در آن v_0 ویژه بردار مربوط به ویژه مقدار ماکزیمم یعنی λ_{max} است، تا رتبه دو بسط دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$F(v + \delta v) = \langle v + \delta v|T|v + \delta v \rangle - \lambda \langle v + \delta v|v + \delta v \rangle = F(v) + \langle \delta v|T - \lambda_{max}|\delta v \rangle. \quad (۸۷)$$

از آنجا که λ_{max} بزرگترین ویژه مقدار است خواهیم داشت:

$$\langle \delta v|T - \lambda_{max}|\delta v \rangle = \langle \delta v|\sum_i (\lambda_i - \lambda_{max})|\lambda_i\rangle \langle \lambda_i|\delta v \rangle \leq 0. \quad (۸۸)$$

که ادعای قضیه را ثابت می کند.

حال از این قضیه استفاده می کنیم و نشان می دهیم که هرگاه درایه های T اکیدا مثبت باشند یعنی $T_{ij} > 0$ آنگاه درایه های $|v_0\rangle$ نیز اکیدا مثبت هستند یعنی $(v_0)_i > 0$. برای نشان دادن این موضوع به این نکته توجه می کنیم که فضای بردارهای بهنجار متناظر با یک کره و بنابراین بدون مرز است. در نتیجه تابع $F(v)$ در نقطه v_0 نه تنها یک ماکزیمم نسبی دارد بلکه این ماکزیمم مطلق است. از برهان خلف استفاده می کنیم و فرض می کنیم که v_0 یک یا چند درایه منفی دارد. حال دقت می کنیم که عبارت $F(v_0)$ مجموع جملات مثبت و منفی است. اما با ضرب کردن این درایه های در عدد -1 بردار دیگری بدست می آوریم که هم بهنجار است و هم مقدار عبارت $F(v)$ را بزرگتر می کند که با ماکزیمم بودن

$F(v_0)$ بدیل به مقدار بمقدار بزرگتری حاصل کند. منافات دارد. بنابراین v_0 نمی تواند دارای هیچ درایه ی منفی ای باشد. حال ثابت می کنیم که هیچ کدام از درایه های v_0 صفر نیز نمی توانند باشند زیرا اگر مثلا درایه اول آن برابر با صفر باشند به این معناست که عبارت زیر صفر شده است

$$\sum_{j=1}^d T_{1j}v_j = 0 \quad (۸۹)$$

که با توجه به مثبت اکید بودن مقادیر T_{ij} و نامنفی بودن v_j ها غیرممکن است. پس ثابت کردیم که تمام درایه های v_0 اکیدا مثبت هستند. اما می دانیم که نمی توان دو بردار متعامد از این گونه داشت و از آنجا که ویژه بردارهای ماتریس هرمیتی همه بر هم عمودند نتیجه می گیریم که بزرگترین ویژه مقدار T واقعا غیر واکن است.

■ **قدردانی:** از بهروز بنیادی دانشجوی این درس در سال ۱۴۰۳ که اشکالاتی از متن اولیه این درسنامه را به من یادآوری کردند تشکر می کنم.